Formule de Stirling par le TCL :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer la formule de Stirling en utilisant les probabilités et notamment le TCL.

Lemme 1 : [Francinou, p.165]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

Preuve :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{((n+k)-n)n^{k-1}}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{n^{k-1}}{(n+k-1)!} - \frac{n^k}{(n+k)!} \right)$$

$$\underset{\text{somme tél.}}{=} \frac{1}{n!} - \frac{n^N}{(n+N)!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n!} \text{ (car CV de la série exponentielle)}$$

Donc la série $\sum \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{n!}$.

■

Proposition 2 : [Francinou, p.165]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
Si l'on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Preuve :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
Comme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1, on a $S_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n)$.

Justifions que l'intégrale existe :
Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(T_n \geq x) \leq \mathbb{P}\left(T_n^2 \geq x^2\right) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}\left(T_n^2\right)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{(Formule de König-Huygens)}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration par la fonction dans $L^1(\mathbb{R}^+)$:

$$\mathbb{P}(T_n \geq x) \underset{p.p.}{\leq} \mathbb{1}_{[0;1]}(x) + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x) \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n}x + n)\mathrm{d}x \underset{t=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n \geq t+n)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{P}(S_n \geq t+n)\mathrm{d}t$$

Or, comme S_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour $t \in]k; k+1]$ que $\mathbb{P}(S_n \geq t+n) = \mathbb{P}(S_n \geq k+1+n)$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n \geq n+k+1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=n+k+1}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^j}{j!}$$

$$\underset{\text{Fub.-Ton.}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j-n-1} e^{-n}\frac{n^j}{j!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} (j-n)\frac{n^j}{j!}$$

$$\underset{k=j-n}{=} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k+n}}{(n+k)!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \frac{n^{n+1}}{n!} \text{ (par le lemme)}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Finalement, on a bien le résultat voulu.

■

Théorème 3 : Formule de Stirling [Francinou, p.165] :
On a l'équivalent : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Preuve :
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
En reprenant les notations précédentes, on a par le théorème central-limite que $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$ où $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}_1(0,1)$.

Donc pour tout x où F_Z est continue (ensemble dont le complémentaire est au plus dénombrable), on a :

$$\mathbb{P}(T_n \geq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Z \geq x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi}}$$

Donc, par le théorème de convergence dominée (cf. majoration dans la proposition précédente), on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

Or, par le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_0^{u} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \left[-e^{-\frac{u^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Ainsi, par la proposition, on a $\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, d'où le résultat.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

On a utilisé dans ce développement le TCL ainsi qu'un résultat sur la convergence en loi dont on rappelle les énoncés :

Définition 4 : Convergence en loi [Chabanol, p.57] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Théorème 5 : [Chabanol, p.58]
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle dont les fonctions de répartition sont respectivement notées F_{X_n} et F_X.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour tout point $t \in \mathbb{R}$ de continuité de F_X on a $F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$.

Théorème 6 : Théorème central limite [Chabanol, p.62] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

II.2 Pour aller plus loin...

Il existe une autre manière de trouver la formule de Stirling : en effet, on peut utiliser les suites ainsi que les intégrales de Wallis pour retrouver l'équivalent (cf. autre développement).

II.3 Recasages

Recasages : 261 - 262 - 264 - 266.

III Bibliographie

— Francinou, *Oraux X-ENS, Mathématiques, Tome 6*.